Crecimiento económico

Nikolas A. Müller-Plantenberg*

2016–2017

*E-mail: nikolas@mullerpl.net. Address: Faculty of Economics and Business Administration, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Cantoblanco, Madrid, Spain.

Índice

1. El modelo de Ramsey **5**

1.1. El modelo de mercado 5

1.1.1. Las familias neoclásicas 6

1.1.2. Las empresas neoclásicas 12

1.1.3. Equilibrio 16

1.2. Escenarios similares alternativos 18

1.2.1. La solución de Robinson Crusoe 18

1.2.2. La solución del planificador 22

1.3. La dinámica de la transición 23

1.3.1. La curva $\dot{k} = 0$ 24

1.3.2. La curva $\dot{c} = 0$ 25

1.3.3. Estados estacionarios 26

1.4. Exclusión de trayectorias explosivas 28

1.5. Análisis de estática comparativa 30
1.5.1. Variación en la inclinación a ahorrar 30
1.5.2. Donaciones aditivos 31
1.5.3. Recaudación de impuestos y redistribución 32
1.5.4. Shocks de productividad 33
1.5.5. Gasto público financiado por impuestos 34

A. Funciones de utilidad **36**
A.1. Utilidad logarítimica. 36
A.2. Utilidad isoelástica. 38
A.3. Utilidad cuadrática. 39
A.4. Utilidad exponencial. 40
A.5. La clase HARA de funciones de utilidad 41

B. La función exponencial **43**

C. Teoría del control óptimo **45**

C.1. Derivación de los resultados fundamentales 45

C.2. El Principio del Máximo 53

C.3. Fórmulas estándares 55

C.4. Literatura 56

1. El modelo de Ramsey

Referencias: Sala-i-Martin (2000), capítulo 3; Blanchard and Fischer (1989), capítulo 2.

1.1. El modelo de mercado

Diferencias con respecto al modelo de crecimiento de Solow-Swan:

- Familias determinan el consumo de forma óptima.
- Separación de consumidores y empresas.
- Tres mercados:
    - Mercado de trabajo (salario)
    - Mercado de capital (tasa de alquiler de capital)
    - Mercado del producto (precio del producto)

1.1.1. Las familias neoclásicas

Maximización de la siguiente función de utilidad:

$$\begin{aligned} U(0) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_t) L_t dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} L_t dt, \end{aligned} \tag{1}$$

donde

$$\begin{aligned} \rho &= \text{tasa de descuento,} \\ c_t &= \text{consumo per capita,} \\ L_t &= \text{tamaño de la población,} \\ \theta &= \text{coeficiente de aversión relativa al riesgo } (> 0). \end{aligned}$$

Supuesto sobre el crecimiento de la población:

$$\frac{\dot{L}_t}{L_t} = n. \tag{2}$$

Entonces:

$$L_t = L(0)e^{nt}. \tag{3}$$

Suponemos que $L(0) = 1$ para simplificar.

Nota:

- $U(0)$ mide la suma de las funciones instantáneas de utilidad $u(c_t)$.
- El horizonte temporal es infinito.
- Se descuenta la utilidad futura con la tasa de descuento ρ.
- La función de utilidad $u(c_t)$ es cóncava, por lo cual las familias quieren ”suavizar” el consumo.

Restricción presupuestaria:

- Las familias poseen activos financieros B_t (positivas o negativas) que generan intereses $r_t B_t$.
- Las familias son propietarios de su propio trabajo, que alquilan al salario w_t por $w_t L_t$.

Entonces:

$$\dot{B} = wL + rB - C. \tag{4}$$

En términos per capita:

$$\begin{aligned} \dot{b} &= \frac{\dot{B}L - B\dot{L}}{L^2} \\ &= w + rb - c - nb, \end{aligned} \tag{5}$$

donde

$$b = \frac{B}{L}, \quad b(0) > 0. \tag{6}$$

Resumiendo:

$$U(0) = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt, \tag{7}$$

$$\text{sujeto a } \dot{b} = w + rb - c - nb. \tag{8}$$

Suponemos que $\rho > n$ (¿por qué?).

Variables de estado y de control:

- Variable de estado: b
- Variable de control: c

Hamiltoniano:

$$H(\cdot) = e^{-(\rho-n)t}\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \nu[w+(r-n)b-c], \tag{9}$$

donde ν es el multiplicador dinámico de Lagrange que se puede interpretar como el valor que el consumidor da a una unidad adicional de activos financieros.

Condiciones de primer orden:

$$H_c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-(\rho-n)t}c^{-\theta} = \nu, \tag{10}$$

$$H_b = -\dot{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad -\dot{\nu} = \nu(r-n), \tag{11}$$

$$\lim_{t\to\infty} b_t\nu_t = 0. \tag{12}$$

Ecuación 10 dice que el valor marginal del consumo, $e^{-(\rho-n)t}c^{-\theta}$, debe ser igual al valor marginal de la inversión, ν.

Log-diferenciación de la ecuación 10:

$$-(\rho - n) - \theta \ln(c_t) = \ln(\nu_t) \quad \Rightarrow \quad -(\rho - n) - \theta \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\nu}}{\nu}. \tag{13}$$

Combinando ecuación 13 with equation 11, obtenemos la ”ecuación de Euler” que relaciona el crecimiento del consumo con el coeficiente de aversión relativa al riesgo, θ, el tipo de interés, r, y la tasa de descuento, ρ:

$$\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho). \tag{14}$$

Ecuación 12 expresa la condición de transversalidad. La interpretación económica de $b_t\nu_t = 0$ es que los individuos optimizadores no quieren dejar nada que tenga valor para después de su muerte.

1.1.2. Las empresas neoclásicas

Supuestos:

- Las empresas alquilan trabajo al salario w_t, y capital al precio R_t.
- El producto que venden tiene un precio unitario.
- La tasa de depreciación del capital es δ.
- Las empresas son competitivas, lo que quiere decir que toman todos los precios como dados.

La función de producción satisface las tres propiedades neoclásicas:

- Rendimientos constantes de escala:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L). \tag{15}$$

- Productividad marginal positiva, pero decreciente:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0. \tag{16}$$

- Satisfacción de las condiciones de Inada:

$$\lim_{k \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{k \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0, \quad \lim_{k \to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty, \quad \lim_{k \to \infty} \frac{\partial L}{\partial K} = 0. \tag{17}$$

Nota que estos supuestos implican:

- $f'(k) > 0$ y $f''(k) < 0$ y
- $\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty$ y $\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$.

La función de producción neoclásica que vamos a utilizar es la función Cobb-Douglas $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$. En términos per capita tenemos:

$$f(k) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = \frac{1}{L}F(K, L) = \frac{1}{L}AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = Ak^{\alpha}. \tag{18}$$

No hay riesgo ni incertidumbre, de forma que el rendimiento de los activos, r, tiene que coincidir con la tasa de beneficio que obtienen los propietarios al alquilar una unidad de capital:

$$r = R - \delta. \tag{19}$$

Las empresas maximizan sus beneficios:

$$\pi = F(K, L) - (r + \delta)K - wL. \tag{20}$$

De las condiciones del primer orden deducimos entonces que el coste de alquiler de los factores de producción es igual a su productividad marginal:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = R = r + \delta, \tag{21}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = w. \tag{22}$$

En términos per capita:

$$r + \delta = f'(k), \tag{23}$$
$$w = f(k) - kf'(k). \tag{24}$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K} AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \alpha A \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} = \alpha A k^{\alpha-1} = f'(k). \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L} AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = (1-\alpha)A \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} &= Ak^{\alpha} - \alpha A k^{\alpha} \\ &= Ak^{\alpha} - k\alpha A k^{\alpha-1} = f(k) - kf'(k).\end{aligned} \tag{26}$$

1.1.3. Equilibrio

Hay equilibrio en todos los mercados:

- Mercado de trabajo: w
- Mercado de capital: R
- Mercado de productos: precio normalizado a uno
- Mercado financiero: $b = k$ (economía cerrada sin gobierno)

Entonces la restricción presupuestaria en ecuación 8 implica:

$$\dot{b} = w + rb - c - nb \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{k} = f(k) - kf'(k) + (f'(k) - \delta)k - c - nk \tag{28}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k. \tag{29}$$

Crecimiento del consumo:

$$\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(f'(k) - \rho - \delta). \tag{30}$$

Condición de transversalidad:

$$\lim_{t \to \infty} k_t \nu_t = 0. \tag{31}$$

Empleando la función de producción Cobb-Douglas, $y = f(k) = Ak^\alpha$, obtenemos:

$$\dot{k} = Ak^\alpha - c - (\delta + n)k, \tag{32}$$

$$\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(\alpha A k^{\alpha - 1} - \rho - \delta). \tag{33}$$

1.2. Escenarios similares alternativos

1.2.1. La solución de Robinson Crusoe

Supuestos:

- Economía cerrada (ahorro igual a inversión)
- Un único bien
- Tasa de depreciación δ
- Tasa de crecimiento de la población n
- Toda la población trabajando

Acumulación del capital:

$$\dot{K}_t = F(K_t, L_t) - C_t - \delta K_t \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{F(K_t, L_t) - C_t}_{\text{ahorro}} = \underbrace{\dot{K}_t + \delta K_t}_{\text{inversión bruta}} . \tag{34}$$

En términos de per capita, suponiendo rendimientos constantes de escala:

$$\begin{aligned}\dot{k} &= \frac{d}{dt}\frac{K}{L} \\ &= \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} \\ &= \frac{F(K, L) - C - \delta K}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} \\ &= f(k) - c - (\delta + n)k.\end{aligned} \tag{35}$$

Problema de maximización:

$$U(0) = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt, \tag{36}$$

$$\text{sujeto a } \dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k \text{ y } k_0 > 0. \tag{37}$$

Hamiltoniano:

$$H(\cdot) = e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \nu[f(k) - c - (\delta + n)k], \tag{38}$$

donde ν es el multiplicador dinámico de Lagrange que se puede interpretar como el valor que el consumidor da a una unidad adicional de activos financieros.

Condiciones de primer orden:

$$H_c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-(\rho-n)t}c^{-\theta} = \nu, \tag{39}$$

$$H_b = -\dot{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad -\dot{\nu} = \nu(f'(k) - n - \delta), \tag{40}$$

$$\lim_{t\to\infty} k_t\nu_t = 0. \tag{41}$$

Log-diferenciación de la equación 39 y combinación con la ecuación 40:

$$-(\rho - n)t - \theta \ln c = \ln(\nu), \tag{42}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(n - \rho - \frac{\dot{\nu}}{\nu}\right) \tag{43}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(n - \rho - \frac{\dot{\nu}}{\nu}\right) = \frac{1}{\theta}[f'(k) - \delta - \rho]. \tag{44}$$

Entonces las condiciones en las ecuaciones 44, 35 y 41 determinan la dinámica del capital y el consumo del modelo. Nota que la solución del modelo de familias productivas de Robinson Crusoe es idéntica a la solución de mercado.

1.2.2. La solución del planificador

Propiedades del planificador:

- El planificador tiene el mismo objetivo que los individuos:

$$U(0) = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt. \tag{45}$$

- El planificador se enfrenta a la misma función de acumulación de capital como en la economía de Robinson Crusoe:

$$\dot{k} = k - c - (\delta + n)k. \tag{46}$$

- El planificador tendrá en cuenta todos los mecanismos, todas las externalidades y toda la información que exista en la economía a la hora de tomar decisiones.

Como no hay mecanismos extraños ni externalidades y los individuos tienen toda la información, el objetivo y la restricción del planificador coincide con el objetivo y la restricción a los que se enfrenta el agente de la economía de Robinson Crusoe. Dado que la solución de Robinson y la de mercado competitivo son idénticas, la solución de economía competitiva es idéntica a la del planificador. Si no hay ninguna interferencia del gobierno, el mercado va a encontrar la solución óptima.

1.3. La dinámica de la transición

La dinámica a la que lleva el modelo de Ramsey se puede ilustrar con un diagrama de fases. En el diagrama, el eje horizontal representa el stock de capital per capita, k, mientras el eje vertical representa el consumo per capita, c. El modelo queda completamente determinado por las siguientes tres ecuaciones (junto con el stock the capital inicial, k_0):

$$\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k, \tag{47}$$

$$\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(f'(k) - \rho - \delta), \tag{48}$$

$$\lim_{t\to\infty} k_t \nu_t = 0. \tag{49}$$

1.3.1. La curva $\dot{k} = 0$

Curva donde $\dot{k} = 0$:

$$\begin{aligned} c &= f(k) - (\delta + n)k \\ &= Ak^{\alpha} - (\delta + n)k. \end{aligned} \tag{50}$$

Esta curva pasa por el punto (0, 0), crece inicialmente con k y luego cae con k hasta cruzarse con el eje horizontal de nuevo.

Regla de oro:

- El máximo consumo per capita se obtiene donde:

$$f'(k) = \delta + n \tag{51}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha A k^{\alpha - 1} = \delta + n \quad \Leftrightarrow \quad k^{\text{oro}} = \left(\frac{\alpha A}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{52}$$

Encima de la curva $\dot{k} = 0$, el capital per capita decrece ($\dot{k} < 0$), mientras que debajo de la curva $\dot{k} = 0$, el capital per capita aumenta ($\dot{k} > 0$).

1.3.2. La curva $\dot{c} = 0$

La primera curva donde $\dot{c} = 0$ es horizontal:

$$c = 0. \tag{53}$$

La segunda curva donde $\dot{c} = 0$ es vertical:

$$f'(k^*) = \rho + \delta \tag{54}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha A (k^*)^{\alpha - 1} = \rho + \delta \quad \Leftrightarrow \quad k^* = \left(\frac{\alpha A}{\rho + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{55}$$

Nota que $k^* < k^{\text{oro}}$ ya que $\rho > n$.

A la izquierda de la curva $\dot{c} = 0$ (es decir, a la izquierda de k^*), el consumo per capita crece $\dot{c} > 0$, mientras que a la derecha de la curve $\dot{c} = 0$ (es decir, a la derecha de k^*), el consumo per capita disminuye $\dot{c} < 0$.

1.3.3. Estados estacionarios

Estados estacionarios donde $\dot{k} = 0$ y $\dot{c} = 0$:

- $k = 0$ y $c = 0$ (estado estacionario inestable),
- $k = k^*$ y $c = f(k^*) - (\delta + n)k^*$ (estado estacionario con estabilidad de ”punto de silla”),
- $k = k^{**} > 0$ y $c = 0$ (intersección de la curva $\dot{k} = 0$ con el eje horizontal, estado estacionario completamente estable).

Nota que k^{**} satisface $f(k^{**}) = (\delta + n)k^{**}$, de forma que en el caso de una tecnología Cobb-Douglas tenemos:

$$k^{**} = \left(\frac{A}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{56}$$

El segundo cruce ocurre en la intersección de la curva $\dot{k} = 0$ y la curva vertical $\dot{c} = 0$ donde $k = k^*$. A largo plazo, la economía deberá converger necesariamente hacia este segundo estado estacionario, a través de lo que se llama la ”trayectoria estable”.

Si, por ejemplo, inicialmente $k < k^*$, las tasas de crecimiento del consumo, del capital y del producto per cápita son positivas.

El análisis de cómo los valores de los parámetros, como por ejemplo el valor de θ, afectan la trayectoria estable se hará en clase.

1.4. Exclusión de trayectorias explosivas

La trayectoria que escogen los agentes tiene que satisfacer las condiciones del primer orden, incluyendo la condición de transversalidad:

$$\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k, \tag{57}$$

$$\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(f'(k) - \rho - \delta), \tag{58}$$

$$\lim_{t\to\infty} k_t \nu_t = 0. \tag{59}$$

Ahora se demuestra que en el modelo infinito, la trayectoria estable es la única trayectoria que satisface todas las condiciones.

Sea $c(k)$ el consumo en la trayectoria estable. Suponemos que el stock the capital inicial es k_0 y que, por ejemplo, $k_0 < k^*$. Ahora vamos a ver que c_0 no puede ser ni más alto ni más bajo que $c(k_0)$.

Primero analizamos lo que pasa si $c_0 > c(k_0)$. En este caso, se consume tanto que nunca se llega a k^*. De hecho, en un momento dado se cruza la curva $\dot{k} = 0$, y es a partir de entonces que el capital disminuye. Inevitablemente, en un período $T < \infty$, todo el capital se habrá consumido, quedando k_t en cero. Pero entonces en el momento T, c_t debería caer súbitamente a cero también ya que no hay nada más que se puede consumir. Como implicación de la caída tanto de c_t y de k_t a cero, tenemos $\dot{c}_T = -\infty$ y $f'(k) = \infty$, con lo cual la ecuación de Euler (ecuación 58) ya no se cumple.

Ahora consideramos el caso en el que $c_0 < c(k_0)$. En este caso, la inversión es alta y la economía converge hacia el stock de capital k^{**}. Como $k^{**} > k^{\text{oro}}$, sabemos que:

$$f'(k^{**}) = r^{**} + \delta < f'(k^{\text{oro}}) = \delta + n \quad \Leftrightarrow \quad r^{**} < n. \tag{60}$$

Por otra parte, deducimos de la condición de optimalidad 11 que:

$$-\dot{\nu} = \nu(r - n) \quad \Rightarrow \quad \nu_t = \nu_0 e^{-(r-n)t}. \tag{61}$$

Entonces v crece sin límite mientras k^{**} se mantiene constante, lo cual viola la condición de transversalidad 59.

1.5. Análisis de estática comparativa

Referencia: Angeletos (2013).

1.5.1. Variación en la inclinación a ahorrar

Consideramos un aumento en la tasa de descuento ρ que corresponde a una disminución en la inclinación a ahorrar por parte de los agentes económicos:

- La curva $\dot{c} = 0$ vertical sí está afectada. Se desplaza hacia la izquierda, dado que δ y k tienen una relación inversa:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(f'(k) - \rho - \delta) = 0. \tag{62}$$

  Como consecuencia, la curva $\dot{c} = 0$ se desplaza hacia la izquierda.

- La curva $\dot{k} = 0$ no está afectada.
- En el nuevo estado estacionario, el capital y el consumo son más bajos.
- En el momento del impacto, el consumo aumenta de forma discreta y empieza una fase de reducción en el stock de capital, k.

1.5.2. Donaciones aditivos

Si los agentes económicos reciben unas donaciones aditivos (e), las ecuaciones del diagrama de fases son:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(f'(k) - \rho - \delta), \tag{63}$$

$$\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k + e. \tag{64}$$

En clase utilizaremos el diagrama de fases para analizar los efectos de un aumento permanente en e por la cantidad Δe.

1.5.3. Recaudación de impuestos y redistribución

En clase consideraremos el caso donde el gobierno impone impuestos sobre el trabajo y el capital (con tasa impositiva τ). Luego el gobierno redistribuye el dinero recaudado a los hogares de forma uniforme (denotaremos la transferencia con T_t).

Las ecuaciones del diagrama de fases son:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[(1-\tau)f'(k) - \rho - \delta], \tag{65}$$

$$\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k. \tag{66}$$

Utilizando el diagrama de fases, analizaremos en clase los efectos:

- de una reducción de los impuestos de forma no anticipada y
- de una reducción de los impuestos de forma anticipada.

1.5.4. Shocks de productividad

Consideramos un shock sobre la productividad total de los factores (total factor productivity, TFP).

La producción es ahora:

$$y = Af(k), \tag{67}$$

donde A representa la productividad total de los factores.

Tanto el rendimiento del capital como el del trabajo son ahora proporcional a la TFP:

$$r = Af'(k), \tag{68}$$
$$w = A[f(k) - kf'(k)] \tag{69}$$

Ahora las ecuaciones diferenciales que determinan el equilibrio son:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[Af'(k) - \rho - \delta], \tag{70}$$
$$\dot{k} = Af(k) - c - (\delta + n)k. \tag{71}$$

Nota que tanto k^* como c^* aumentan con A.

Utilizando el diagrama de fases, analizaremos en clase los efectos de un aumento de la TFP de forma no anticipada.

1.5.5. Gasto público financiado por impuestos

Consideramos un gobierno que financia un gasto público exógeno

- recaudando impuestos de suma fija y, alternativamente,
- impuestos proporcionales a la renta del trabajo y la del capital.

Gasto público financiado por impuestos de suma fija

El gasto público, g, es exógeno. Para financiarlo, el estado recauda impuestos de suma fija, T, que no afectan a los consumidores en su decisión sobre la cantidad que quieren consumir y ahorrar.

Aquí las ecuaciones de la diagrama de fases son:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[f'(k) - \rho - \delta], \tag{72}$$

$$\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k - g. \tag{73}$$

Utilizando el diagrama de fases, analizaremos en clase los efectos de un aumento del gasto público financiado por impuestos de suma fija.

Gasto público financiado por impuestos proporcionales sobre la renta del trabajo y del capital

Ahora el gobierno recauda impuestos proporcionales sobre la renta del trabajo y del capital. El tipo impositivo es τ, y la restricción presupuestaria del gobierno es $g = \tau f(k)$.

Aquí las ecuaciones de la diagrama de fases son:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[(1-\tau)f'(k) - \rho - \delta], \tag{74}$$

$$\dot{k} = (1-\tau)f(k) - c - (\delta + n)k. \tag{75}$$

Utilizando el diagrama de fases, analizaremos en clase los efectos de un aumento del gasto público financiado por impuestos proporcionales sobre la renta del trabajo y del capital.

A. Funciones de utilidad

A.1. Utilidad logarítimica.

La utilidad logarítimca viene dada por:

$$
\begin{aligned}
u(C) &= \log(C), \\
u'(C) &= \frac{1}{C} > 0, \\
u''(C) &= -\frac{1}{C^2} < 0, \\
\bar{\gamma}(C) &= -\frac{u''(C)}{u'(C)} = \frac{1}{C}, \\
\gamma(C) &= -\frac{\frac{du'(C)}{u'(C)}}{\frac{dC}{C}} = -\frac{Cu''(C)}{u'(C)} = 1, \\
\sigma(C) &= \frac{1}{\gamma(C)} = -\frac{\frac{dC}{C}}{\frac{du'(C)}{u'(C)}} = -\frac{u'(C)}{Cu''(C)} = 1,
\end{aligned} \tag{76}
$$

donde

- $\bar{\gamma}(C)$ es la aversión absoluta al riesgo, o el recíproco de la llamada tolerancia al riesgo,
- $\gamma(C)$ es la aversión relativa al riesgo, o la utilidad marginal con respecto al consumo, y
- $\sigma(C)$ es la elasticidad de sustitución intertemporal.

A.2. Utilidad isoelástica.

La clase de funciones de utilidad por período caracterizada por una elasticidad de sustitución intertemporal constante es:

$$\begin{aligned}
u(C) &= \frac{C^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}, \qquad \sigma > 0, \\
u'(C) &= C^{-\frac{1}{\sigma}} > 0, \\
u''(C) &= -\frac{1}{\sigma}C^{-\frac{1}{\sigma}-1} < 0, \\
\bar{\gamma}(C) &= -\frac{u''(C)}{u'(C)} = \frac{1}{\sigma C}, \\
\gamma(C) &= -\frac{Cu''(C)}{u'(C)} = \frac{1}{\sigma} = \gamma = \text{const.} \\
\sigma(C) &= \frac{1}{\gamma(C)} = \sigma = \text{const.}
\end{aligned} \tag{77}$$

Cuando $\sigma = 1$, se reemplaza la función de utilidad isoelástica por su límite, $\log(C)$.

A.3. Utilidad cuadrática.

La función de utilidad cuadrática es:

$$
\begin{aligned}
u(C) &= -\frac{(b-C)^2}{2}, \\
u'(C) &= b - C, \qquad u'(C) \geq 0 \text{ if } C \leq b, \\
u''(C) &= -1 < 0, \\
\bar{\gamma}(C) &= -\frac{u''(C)}{u'(C)} = \frac{1}{b-C}, \\
\gamma(C) &= -\frac{Cu''(C)}{u'(C)} = \frac{C}{b-C}, \\
\sigma(C) &= \frac{1}{\gamma(C)} = \frac{b}{C} - 1.
\end{aligned} \tag{78}
$$

A.4. Utilidad exponencial.

La función de utilidad exponencial es:

$$
\begin{aligned}
u(C) &= -be^{-\frac{C}{b}}, \qquad b > 0, \\
u'(C) &= e^{-\frac{C}{b}} > 0, \\
u''(C) &= -\frac{1}{b}e^{-\frac{C}{b}} < 0, \\
\bar{\gamma}(C) &= -\frac{u''(C)}{u'(C)} = \frac{1}{b} = \text{const.}, \\
\gamma(C) &= -\frac{Cu''(C)}{u'(C)} = \frac{C}{b}, \\
\sigma(C) &= \frac{1}{\gamma(C)} = \frac{b}{C}.
\end{aligned} \tag{79}
$$

A.5. La clase HARA de funciones de utilidad

Una función de utilidad de la clase HARA, $u(C)$, es una función de utilidad cuya aversión absoluta al riesgo es hiperbólica (HARA: hyperbolic absolute risk aversion):

$$\bar{\gamma} = -\frac{u''(C)}{u'(C)} = \frac{1}{aC + b} > 0, \tag{80}$$

donde a y b son constantes. Dado que la inversa de la aversión absoluta al riesgo es la tolerancia al riesgo, una función de utilidad de la clase HARA tiene una tolerancia al riesgo que es lineal:

$$\frac{1}{\bar{\gamma}} = -\frac{u'(C)}{u''(C)} = aC + b > 0. \tag{81}$$

La aversión relativa al riesgo de una función de utilidad de la clase HARA viene dada por:

$$\gamma(C) = -\frac{Cu''(C)}{u'(C)} = \frac{C}{aC + b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2C + ab}. \tag{82}$$

Para una función de utilidad de la clase HARA:

- la tolerancia al riesgo (el recíproco de la aversión absoluta al riesgo) es una función que crece linealmente con a y que es una constante is $a = 0$;
- la aversión relativa al riesgo crece con b y es constante si $b = 0$.

Se puede mostrar que todas las funciones de utilidad mencionadas arriba pertenecen a la familia HARA:

Función de utilidad	a	b
Logarítmica	> 0	$= 0$
Isoelástica	> 0	$= 0$
Cuadrática	< 0	> 0
Exponencial	$= 0$	> 0

B. La función exponencial

El número e se define de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{100\,\%}{n}\right)^n .
\end{aligned}
\tag{83}
$$

El número e se puede entonces interpretar como el rendimiento compuesto de un activo que gana un interés de $100\,\%$ por período que está reinvertido continuamente durante un período.

Esta definición se puede utilizar para expresar $e^{\rho t}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} e^{\rho t} &= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\rho t} \\ &= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\rho}\right]^{t} \\ &= \left[\lim_{n'\to\infty}\left(1+\frac{\rho}{n'}\right)^{n'}\right]^{t} \end{aligned} \tag{84}$$

donde $n' = n\rho$ y se hace uso de la regla de las potencias para límites. El término $e^{\rho t}$ se puede interpretar entonces como el rendimiento compuesto de un activo que gana un interés de ρ por período que está reinvertido continuamente durante t períodos.

Es intuitivo que el rendimiento neto de un activo que gana un interés de ρ durante un período infinitesimalmente pequeño que está reinvertido continuamente es igual a ρ. De hecho, esto se puede mostrar utilizando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{dt\to 0}\frac{e^{\rho dt}-1}{dt} = \lim_{dt\to 0}\frac{\rho e^{\rho dt}}{1} = \rho. \tag{85}$$

C. Teoría del control óptimo

C.1. Derivación de los resultados fundamentales

Una empresa quiere maximizar sus beneficios totales durante un período que empieza en $t = 0$ y termina en el momento T:

$$W(k_0, \boldsymbol{x}) = \int_0^T u(k, x, t)dt. \tag{86}$$

La variable k_t es el stock de capital en el momento t y el stock de capital inicial, k_0, viene dada para la empresa. La empresa tiene que elegir el valor de la variable x_t en cada momento. La función $u(k_t, x_t, t)$ determina la tasa con la que la empresa gana beneficios en el momento t como resultado de tener el capital k y tomar las decisión x. El integral $W(\cdot)$ representa la suma de los beneficios que se ganan durante el período desde el momento inicial hasta el momento T cuando el stock de capital inicial es k_0 y se siguen unas decisiones representadas por $\boldsymbol{x}$. Nota que $\boldsymbol{x}$ representa un número infinito de decisiones desde la fecha inicial hasta T.

La siguiente ecuación determina la variación en el stock de capital:

$$\dot{k} = \frac{dk}{dt} = f(k, x, t). \tag{87}$$

Nota que las decisiones x influyen no sólo a los beneficios contemporáneos sino que también la tasa con la que el stock de capital está cambiando y por tanto la cantidad de capital disponible en el futuro.

El problema es cómo elegir la trayectoria $\boldsymbol{x}$ de tal manera que se maximiza el resultado total, W. La solución no es fácil dado que se trata de un problema de optimización en un contexto dinámico. Cálculo ordinario sólo nos demuestra cómo se pueden elegir variables individuales para solucionar un problema de optimización. ¿Entonces cómo se puede resolver el problema? Lo que vamos a hacer es reducir el problema a uno al que podemos aplicar el cálculo ordinario.

Considera el problema cuando el período relevante empieza en el momento t:

$$\begin{aligned} W(k_t, \boldsymbol{x}, t) &= \int_t^T u(k_\tau, x_\tau, \tau) d\tau \\ &= u(k_t, x_t, t)\Delta + \int_{t+\Delta}^T u(k_\tau, x_\tau, \tau) d\tau \\ &= u(k_t, x_t, t)\Delta + W(k_{t+\Delta}, \boldsymbol{x}, t+\Delta). \end{aligned}$$

donde Δ es un intervalo de tiempo muy pequeño. Esto dice que el valor contribuido a la suma total de los beneficios a partir del momento t tiene dos partes. La primera parte consiste en los beneficios del intervalo de tiempo pequeño que comienza en el momento t. La segunda parte es la suma de todos los beneficios que se ganan a partir del momento $t + \Delta$.

Sea $V^*(k_t, t)$ el mejor valor para W que se puede conseguir cuando se empieza en el momento t con un stock de capital k_t:

$$V^*(k_t, t) \equiv \max_{\boldsymbol{x}} W(k_t, \boldsymbol{x}, t).$$

Suponemos que la empresa elige x_t (cualquier decisión, no necesariamente la decisión óptima) para el intervalo de tiempo corto e inicial Δ y que después sigue la mejor política posible. Esto nos da:

$$V(k_t, x_t, t) = u(k_t, x_t, t)\Delta + V^*(k_{t+\Delta}, t + \Delta). \tag{88}$$

Ahora todo el problema se reduce a uno que consiste en encontrar el valor óptimo para x_t. Este valor convertiría V en la última ecuación a V^*. La condición del primer orden es:

$$\begin{aligned} &\Delta\frac{\partial}{\partial x_t}u(k,x_t,t)+\frac{\partial}{\partial x_t}V^*(k_{t+\Delta},t+\Delta) \\ &= \Delta\frac{\partial}{\partial x_t}u(k,x_t,t)+\frac{\partial V^*}{\partial k_{t+\Delta}}\frac{\partial k_{t+\Delta}}{\partial x_t} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{89}$$

Considera el segundo factor del segundo término. Dado que Δ es pequeño,

$$k_{t+\Delta}=k_t+\dot{k}\Delta.$$

Recuerda que $\dot{k}$, la tasa con la que el stock de capital crece, depende de la variable de control, x_t:

$$\dot{k}=f(k,x,t).$$

Nosotros obtenemos:

$$\frac{\partial k_{t+\Delta}}{\partial x_t}=\Delta\frac{\partial f}{\partial x_t}.$$

¿Cuál es el significado del primer factor, $\partial V^*/\partial k$? Es el valor marginal de capital en el momento $t + \Delta$ que nos dice cómo el valor maximal de W varía en respuesta a un incremento por una unidad del stock de capital en el momento $t + \Delta$. Lo denotamos como λ_t:

$$\lambda_t \equiv \frac{\partial}{\partial k} V^*(k, t).$$

A veces, vamos a llamar a λ_t el co-estado y a k_t el estado.

La condición del primer orden en ecuación (89) ahora es:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x_t} + \lambda_{t+\Delta}\frac{\partial f}{\partial x_t} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_t} + \lambda_t\frac{\partial f}{\partial x_t} + \dot{\lambda}_t\Delta\frac{\partial f}{\partial x_t} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Aquí se ha hecho uso del hecho de que el valor marginal de capital varía de forma suave a través del tiempo, de forma que $\lambda_{t+\Delta} = \lambda_t + \dot{\lambda}\Delta$.

Vamos a dejar que Δ se acerque a cero. El tercer término llega a ser muy, muy pequeño, así que lo vamos a ignorar. Entonces obtenemos el siguiente resultado importante:

$$\frac{\partial u}{\partial x_t} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_t} = 0. \tag{90}$$

Esta ecuación dice que en la trayectoria optimal, el effect marginal a corto plazo de una variación en la variable de control tiene que compensar el efecto a largo plazo de esta variación sobre el valor total del stock de capital.

Supongamos que el valor óptimo de x_t se haya determinado con la ecuación (90) y que lo denotamos como x_t^*. Cuando se coge esta decisión, $V(k_t, x_t, t)$ en ecuación (88) llega a ser igual a $V^*(k_t, t)$:

$$V^*(k,t) = u(k, x_t^*, t)\Delta + V^*(k_{t+\Delta}, t+\Delta).$$

Vamos a diferenciar esta ecuación con respecto a k:

$$\begin{aligned}
\lambda_t &= \Delta\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{\partial}{\partial k}V^*(k_{t+\Delta}, t+\Delta) \\
&= \Delta\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{\partial k_{t+\Delta}}{\partial k}\lambda_{t+\Delta} \\
&= \Delta\frac{\partial u}{\partial k} + \left(1 + \Delta\frac{\partial f}{\partial k}\right)(\lambda + \dot{\lambda}\Delta) \\
&= \Delta\frac{\partial u}{\partial k} + \lambda + \Delta\lambda\frac{\partial f}{\partial k} + \Delta\dot{\lambda} + \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial k}\Delta^2.
\end{aligned}$$

El último término de la última línea llega a ser muy pequeño cuando Δ se acerca a cero y lo vamos a ignorar. Entonces obtenemos otro resultado importante:

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial u}{\partial k} + \lambda\frac{\partial f}{\partial k}. \tag{91}$$

Esto significa que cuando se sigue la trayectoria óptima para la acumulación de capital, la tasa con la que una unidad del capital se desprecia en un intervalo corto tiene que ser igual a su contribución a los beneficios actuales durante el intervalo más su contribución a los beneficios potenciales en el futuro, es decir, después del intervalo corto.

C.2. El Principio del Máximo

Los dos resultados en las ecuaciones (90) y (91), junto con el requerimiento que $\dot{k} = f(k, x, t)$ que forma parte de la especificación del problema, se pueden resumir con la ayuda de una función auxiliar que se suele llamar la función Hamiltoniana, o el Hamiltoniano:

$$H \equiv u(k, x, t) + \lambda_t f(k, x, t).$$

Todas las tres fórmulas se pueden expresar en términos de las derivadas parciales del Hamiltoniano:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{k}, \tag{92}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \tag{93}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = -\dot{\lambda}. \tag{94}$$

Estas tres fórmulas determinan conjuntamente las trayectorias a través del tiempo de la variable de control, x_t, el stock de capital, k_t, y el valor del capital, λ_t.

¿Por qué se habla entonces del Principio del Máximo? Para verlo, considera la siguiente modificación del Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H^* &\equiv u(k,x,t) + \frac{d}{dt}\lambda k \\ &= u(k,x,t) + \lambda\dot{k} + \dot{\lambda}k. \end{aligned}$$

H^* se puede interpretar como la suma de los beneficios realizados durante un intervalo muy corto de tiempo y la variación en el valor del stock de capital (que resulta tanto de una variación de la cantidad como de una variación de la valoración) durante este intervalo de tiempo. En otras palabras, resume todos los beneficios actuales y potenciales futuros. Esto es lo que se quiere maximizar durante el período bajo consideración, desde el momento inicial hasta T. Pero si maximizamos H^* con respecto a x y k, simplemente obtenemos (90) y (91). El Hamiltoniano modificado H^* se distingue de H porque incluye ganancias de capital. Pero esto es sólo una cuestión de definición. Si utilizamos H en lugar de H^*, las fórmulas relevantes son las de las ecuaciones (92) a (94).

Para las condiciones de frontera, mira Chiang (1992). No se han mencionado las condiciones del segundo orden pero en un principio las deberíamos comprobar también.

C.3. Fórmulas estándares

En economía, el problema del control óptimo a menudo tiene la siguiente forma. La función objetiva es:

$$W(k_0) = \int_0^t u(k_t, x_t, t)e^{-\rho t}dt,$$

donde $e^{-\rho t}$ es el factor de descuento y k_0, el valor inicial de la variable de estado, se presenta como parte del problema. La ecuación de estado es $\dot{k} = f(k_t, u_t, t)$.

Para un problema de este tipo, el Hamiltoniano es:

$$H \equiv u(k_t, x_t, t)e^{-\rho t} + \lambda_t f(k_t, x_t, t).$$

El Principio del Máximo requiere que las siguientes ecuaciones se cumplen para $t \,\epsilon\, [0, \infty]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \lambda} &= \dot{k}, \\
\frac{\partial H}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial H}{\partial k} &= -\dot{\lambda}.
\end{aligned}$$

Un método igualmente válido es utilizar el Hamiltoniano de valor corriente que tiene la siguiente definición:

$$H_C \equiv He^{-\rho t} = u(k_t, x_t, t) + \mu_t f(k_t, x_t, t),$$

donde trabajamos con una variable de co-estado modificada $\mu \equiv \lambda_t e^{-\rho t}$. Las condiciones del primer orden son ahora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mu} &= \dot{k}, \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &= -\dot{\mu} + \rho\mu. \end{aligned}$$

C.4. Literatura

Una buena introducción a la teoría del control óptimo es Chiang (1992). Sydsæter, Strøm and Berck (2000) ofrecen una colección de fórmulas útiles. The derivaciones en este apéndice son un resumen del artículo de Dorfman (1969) que da una interpretación económica al Principio del Máximo (Maximum Principle).

Índice

Referencias

Angeletos, George-Marios. Lecture notes: the Ramsey model. 2013.

Blanchard, Olivier Jean and Stanley Fischer. *Lectures on Macroeconomics*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1989.

Chiang, Alpha C. *Elements of Dynamic Optimization*. McGraw-Hill, Inc., New York, St. Louis, San Francisco, 1992.

Dorfman, Robert. An economic interpretation of optimal control theory. *American Economic Review*, vol. 59, no. 5, Nov. 1969, 817–831.

Sala-i-Martin, Xavier X. *Apuntes en Crecimiento Económico*. Antoni Bosch, Barcelona, 2000.

Sydsæter, Knut, Arne Strøm and Peter Berck. *Economists' Mathematical Manual*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.