Macroeconometría (2005–2006)
Examen final

Nikolas A. Müller-Plantenberg*

30 de junio de 2006

Nombre: ______________________________

Apellido: ______________________________

NIF: ______________________________

Instrucciones

Por favor, no leer las preguntas antes de que el profesor lo indique.

Hay tres partes, cada una con dos preguntas entre las que se puede elegir. **Contesta tres preguntas, una de cada parte.**

No hay ninguna ventaja de contestar ambas preguntas de una parte; en caso de que haya respuestas a las dos preguntas, sólo vale la respuesta a la primera de las dos preguntas.

Duración del examen: **2 horas** (40 minutos para cada pregunta).

*E-mail: nikolas.muller@uc3m.es. Address: Room 15.1.08, Department of Economics, Universidad Carlos III de Madrid, Calle Madrid 126, 28903 Getafe (Madrid), Spain. Phone: +34 91 624-8669.

Pregunta	Puntos	Obtenido
1	33	
2	33	
3	33	
4	33	
5	34	
6	34	
Total	200	

1. Ecuaciones en diferencias

1. (a) En general, la solución de una ecuación en diferencias del segundo orden depende de las raíces características, α_1 y α_2. ¿Qué forma tiene la solución en cada uno de los siguientes casos?
   I. Las raíces características, α_1 y α_2, son reales y distintos. [2]
   II. Las raíces características, α_1 y α_2, son reales e iguales. [2]
   III. Las raíces características, α_1 y α_2, son imaginarias. [2]

   Considera la siguiente ecuación en diferencias del segundo orden:

$$y_t = 0,6y_{t-1} - 0,09y_{t-2} + 0,98. \tag{1}$$

   (b) Deriva la ecuación característica de la ecuación (1). ¿Cuáles son las raíces características? [6]

   (c) Deriva la solución homogénea, y_t^h, una solución particular, y_t^p, y la solución general, y_t^g?, de la ecuación (1). [7]

   (d) Suponemos que hay las siguientes condiciones iniciales: [7]

$$y_0 = 3,$$
$$y_2 = 2,27.$$

   Con estas condiciones iniciales, ¿cuál es la solución general, y_t^g?

   (e) Sustituye la solución homogénea, y_t^h, en la ecuación homogénea asociada con la ecuación (1) y comprueba así que la solución homogénea es correcta. [7]

   Total de pregunta 1: [33]

2. Considera el siguiente modelo de una economía abierta:

$$s_t = -\xi c_t, \tag{2a}$$
$$q_t = s_t, \tag{2b}$$
$$z_t + c_t = 0, \tag{2c}$$
$$z_t = z_{t-1} - \phi q_{t-1}, \tag{2d}$$

   donde

   $q_t :=$ tipo de cambio real (aumento = apreciación real),
   $s_t :=$ tipo de cambio nominal (aumento = apreciación nominal),
   $z_t :=$ cuenta corriente (exportaciones netas),
   $c_t :=$ transferencias de dinero ("cash flow"),
   $\xi > 0,$
   $\phi > 0.$

   (a) Interpreta las ecuaciones del modelo en términos económicos. [4]

(b) De las ecuaciones del modelo (2), forma una ecuación en diferencias en z_t como única variable. [4]

(c) Deriva la ecuación característica, mostrando todos los pasos. ¿Cuáles son las raíces características? [4]

(d) Deriva la solución homogénea, y_t^h, una solución particular, y_t^p, y la solución general, y_t^g, de la ecuación en diferencias que has derivado en la parte (b). [4]

Ahora considera el siguiente modelo alternativo:

$$s_t = -\xi c_t, \tag{3a}$$
$$q_t = s_t, \tag{3b}$$
$$z_t + d_t + c_t = 0, \tag{3c}$$
$$d_t = d_t^1 - d_{t-1}^1, \tag{3d}$$
$$c_t = d_{t-1}^1, \tag{3e}$$
$$z_t = z_{t-1} - \phi q_{t-1}, \tag{3f}$$

donde

d_t^1 := flujo de deuda, creada en t, a devolver en $t+1$.

(e) ¿Cómo cambia la interpretación económica del modelo con respecto al modelo anterior? [4]

(f) De las ecuaciones del modelo (3), forma una ecuación en diferencias en z_t como única variable. [4]

(g) Deriva la ecuación característica, mostrando todos los pasos. ¿Cuáles son las raíces características? [4]

(h) Deriva la solución homogénea, y_t^h, una solución particular, y_t^p, y la solución general, y_t^g, de la ecuación en diferencias que has derivado en la parte (f). [5]

Total de pregunta 2: [33]

2. Modelos de series temporales univariantes

3. Considera el siguiente proceso ARMA(4,2):

$$y_t = 0{,}5y_{t-1} + \phi y_{t-3} - 0{,}5\phi y_{t-4} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} + 0{,}25\varepsilon_{t-2},$$

donde

$$\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2),$$
$$|\phi| < 1.$$

(a) Demuestra que el modelo en ecuación (3) es sobreparametrizado y que el modelo siguiente es equivalente: [6]

$$y_t = \phi y_{t-3} + \varepsilon_t - 0{,}5\varepsilon_{t-1}. \tag{4}$$

(b) Determina si el modelo en ecuación (4) es estacionario. Explica tu respuesta. [6]

(c) Calcula la función de autocorrelación del modelo en ecuación (4). Dibuja el correlograma para los primeros nueve retardos; es decir, la función de autocorrelación, ρ_k, con $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$. [8]

(d) El modelo en ecuación (4) es de la siguiente forma: [7]

$$y_t = \phi y_{t-3} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}.$$

Demuestra como se puede transformar este modelo en un modelo de medias móviles del orden infinito:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}.$$

(e) Determina los valores de ψ_0, ψ_1, ψ_2 y ψ_3 en términos de ϕ y θ. [6]

Total de pregunta 3: [33]

4. Considera el siguiente proceso ARMA(5,1):

$$y_t = y_{t-1} + \phi y_{t-4} - \phi y_{t-5} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1},$$

donde

$$|\phi| < 1,$$
$$\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2).$$

(a) Demuestra que el proceso no es estacionario y determina los valores de p, d y q de su representación ARIMA(p, d, q). [6]

(b) ¿Cuál es la característica importante de esta serie? Dada ésta característica, ¿existe otra representación ARIMA de este proceso? [6]

(c) Demuestra que Δy_t es un proceso estacionario. [6]

(d) Calcula la función de autocorrelación de Δy_t, utilizando las ecuaciones de Yule-Walker. [10]

(e) ¿Cuál es la notación generalizada para modelos ARIMA con estacionalidad? [5]

Total de pregunta 4: [33]

3. Modelos de series temporales multivariantes

5. (a) En el análisis de modelos de vectores autoregresivos (VAR), distinguimos lo que se llama un VAR estructural y lo que se llama un VAR estándar. ¿Cuál es la diferencia entre ambos modelos? [7]

   (b) ¿Qué significa cuando se habla de la necesidad de identificar un modelo de vectores autoregresivos? Da un ejemplo de un método de identificación (que no sea el método de Blanchard y Quah) y explica en breve su idea principal. [7]

Blanchard y Quah (1989) proponen un elaborado método de identificación de un VAR que sirve para descomponer el producto nacional en sus componentes temporales y permanentes.

El VAR estructural que proponen es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(L) & C_{12}(L) \\ C_{21}(L) & C_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

donde

$$\begin{aligned} \Sigma_\varepsilon &:= \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\varepsilon_1) & \mathrm{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \mathrm{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \mathrm{Var}(\varepsilon_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ y_t &:= \text{producto nacional}, \\ z_t &:= \text{tasa del desempleo}. \end{aligned}$$

El VAR estructural se puede escribir también así:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{11}(k)\varepsilon_{1,t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{12}(k)\varepsilon_{2,t-k}, \\ z_t &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{21}(k)\varepsilon_{1,t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{22}(k)\varepsilon_{2,t-k}. \end{aligned}$$

Por otra parte, el VAR estándar es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(L) & A_{12}(L) \\ A_{21}(L) & A_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1,t} \\ e_{2,t} \end{bmatrix}.$$

   (c) Blanchard y Quah imponen la siguiente restricción: [7]

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{11}(k)\varepsilon_{1,t-k} = 0.$$

Explica en breve cómo esta ecuación sirve para dar una interpretación económica a los "shocks" $\varepsilon_{1,t}$ y $\varepsilon_{2,t}$ (además de hacer posible la identificación del modelo).

(d) Del modelo estándar, se puede derivar la siguiente ecuación: [7]

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\Delta y_t \\ z_t\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 - A_{11}(L)L & -A_{12}(L)L \\ -A_{21}(L)L & 1 - A_{22}(L)L\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}e_{1,t} \\ e_{2,t}\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A^*|} \begin{bmatrix}1 - A_{22}(L)L & A_{12}(L)L \\ A_{21}(L)L & 1 - A_{11}(L)L\end{bmatrix} \begin{bmatrix}c_{11}(0) & c_{12}(0) \\ c_{21}(0) & c_{22}(0)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t}\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{6}$$

donde

$$A^* := \begin{bmatrix}1 - A_{11}(L)L & -A_{12}(L)L \\ -A_{21}(L)L & 1 - A_{22}(L)L\end{bmatrix}^{-1}.$$

Desconocemos inicialmente la siguiente matriz:

$$C(0) := \begin{bmatrix}c_{11}(0) & c_{12}(0) \\ c_{21}(0) & c_{22}(0)\end{bmatrix}.$$

Dada la ecuación (6), explica (en palabras, sin cálculos) por qué el conocimiento de la matriz $C(0)$ es importante para recuperar los parámetros $c_{11}(k)$, $c_{12}(k)$, $c_{21}(k)$ y $c_{22}(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ del VAR estructural en ecuación (5).

(e) ¿Para qué puede servir el conocimiento de $c_{11}(k)$, $c_{12}(k)$, $c_{21}(k)$ y $c_{22}(k)$? [6]

Total de pregunta 5: [34]

6. Distinguimos dos tipos de modelos de vectores autoregresivos (VAR). Un VAR estructural (sistema primitivo) del primer orden tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y_t &= b_{10} - b_{12} z_t + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt}, \\ z_t &= b_{20} - b_{21} y_t + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt}, \end{aligned} \tag{7}$$

donde

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{yt} \sim \text{WN}(0, \sigma_y^2), \\ &\varepsilon_{zt} \sim \text{WN}(0, \sigma_z^2), \\ &\text{Cov}(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{z,t-k}) = 0 \quad \forall t, k. \end{aligned}$$

Un VAR estándar, por otro lado, tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y_t &= a_{10} + a_{11} y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + e_{1t}, \\ z_t &= a_{20} + a_{21} y_{t-1} + a_{22} z_{t-1} + e_{2t}, \end{aligned} \tag{8}$$

donde

$$\begin{aligned} &e_{1t} \sim \text{WN}(0, \sigma_1^2), \\ &e_{2t} \sim \text{WN}(0, \sigma_2^2), \\ &\text{Cov}(e_{1t}, e_{2t}) = \sigma_{12}. \end{aligned}$$

(a) I. Demuestra cómo se puede escribir el VAR estructural en ecuación (7) en términos de vectores y matrices. Escribe los vectores y matrices con todos sus elementos. [2]

II. Demuestra cómo se puede escribir el VAR estándar en ecuación (8) en términos de vectores y matrices. Escribe los vectores y matrices con todos sus elementos. [2]

(b) I. Explica cómo se puede convertir un VAR estructural en un VAR estándar. [2]

II. ¿Qué relación existe entonces entre e_{1t} y e_{2t} por un lado y ε_{yt} y ε_{zt} por otro? [2]

(c) Queremos aplicar la descomposición de Choleski y, para ello, suponemos que $b_{21} = 0$.

I. Escribe de nuevo el VAR estructural en términos de vectores y matrices, suponiendo que $b_{21} = 0$. Escribe los vectores y matrices con todos sus elementos. [3]

II. A este VAR estructural (con $b_{21} = 0$), aplica ahora la transformación necesaria para obtener un VAR estándar. [3]

III. Ahora, "igualando parámetros" entre el VAR estructural y el VAR estándar, demuestra qué relaciones existen entre los parámetros del VAR estructural (b_{10}, b_{20}, b_{12}, γ_{11}, γ_{21}, γ_{12}, γ_{22}, σ_y^2, σ_z^2) y los parámetros del VAR estándar (a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}, σ_1^2, σ_2^2, σ_{12}). [4]

IV. ¿Es posible identificar el VAR estructural desde el VAR estándar? (Una explicación muy breve es suficiente, no hace falta ningún tipo de cálculo.) [2]

Ahora miramos otro problema. Considera el siguiente modelo de vectores autoregresivos:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

(d) Del modelo en ecuación (9), deriva una ecuación en diferencias univariante de la variable y_t. [5]

(e) Determina si $\{y_t\}$ es estacionario. [4]

(f) Caracteriza la función impulso-respuesta de y_t para un shock de magnitud unitaria de e_{1t} y para un shock de magnitud unitaria de e_{2t}. [5]

Total de pregunta 6: [34]

Referencias

Blanchard, O. J. y Quah, D. (1989), 'The dynamic effects of aggregate demand and supply disturbances', *American Economic Review* **79**(4), 655–673.