

# Macroeconometría (2005–2006)

## Examen de prueba

Nikolas A. Müller-Plantenberg\*

24 de mayo de 2006

Nombre: \_\_\_\_\_

Apellido: \_\_\_\_\_

NIF (sólo examen final): \_\_\_\_\_

### Instrucciones

Por favor, no leer las preguntas antes de que el profesor lo indique.

Hay tres partes, cada una con dos preguntas entre las que se puede elegir. **Contesta tres preguntas, una de cada parte.**

No hay ninguna ventaja de contestar a ambas preguntas de una parte; en este caso, sólo vale la respuesta a la primera de las dos preguntas.

Duración del examen: **1 hora y 55 minutos** (10 minutos para leer las preguntas, 35 minutos para cada pregunta).

El resultado de este examen de prueba no se incluirá en la nota del curso.

---

\*E-mail: nikolas.muller@uc3m.es. Address: Room 15.1.08, Department of Economics, Universidad Carlos III de Madrid, Calle Madrid 126, 28903 Getafe (Madrid), Spain. Phone: +34 91 624-8669.

Pregunta	Puntos	Obtenido
1	33	
2	33	
3	33	
4	33	
5	34	
6	34	
Total	200	

## 1 Ecuaciones en diferencias

1. Considera la siguiente ecuación en diferencias del segundo orden:

$$y_t = 0.7y_{t-1} - 0.12y_{t-2} + 4.2. \quad (1)$$

- (a) Deriva la ecuación característica, mostrando todos los pasos. ¿Cuáles son las raíces características? [6]
- (b) Deriva la solución homogénea,  $y_t^h$ , una solución particular,  $y_t^p$ , y la solución general,  $y_t^g$ , de la ecuación (1). [7]
- (c) Demuestra cómo se puede confirmar que la solución homogénea,  $y_t^h$ , es correcta. [7]
- (d) Supón que hay las siguientes condiciones iniciales: [7]

$$y_0 = 16,$$

$$y_1 = 2.$$

Tomando en cuenta estas condiciones iniciales, ¿cuál es la solución general,  $y_t^g$ ?

- (e) En general, la solución de una ecuación en diferencias del segundo orden depende de las raíces características,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . ¿Qué forma tiene la solución en cada uno de los siguientes casos? [2]
  - i. Las raíces características,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , son reales y distintos. [2]
  - ii. Las raíces características,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , son reales e iguales. [2]
  - iii. Las raíces características,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , son imaginarias. [2]

Total de pregunta 1: [33]

2. Considera la siguiente ecuación en diferencias de primer orden:

$$y_t = a_0 + a_1y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2)$$

- (a) i. Deriva una solución particular para  $y_t$  en términos de los pasados valores de  $\{\varepsilon_t\}$ , utilizando el método de iteración. (Para simplificar la solución, puedes suponer que la solución es convergente.) [7]
  - ii. ¿Bajo qué condición es esta solución convergente? [2]
- (b) i. Deriva una solución particular para  $y_t$  en términos de los futuros valores de  $\{\varepsilon_t\}$ , utilizando el método de iteración. (Para simplificar la solución, puedes suponer que la solución es convergente.) [7]
  - ii. ¿Bajo qué condición es esta solución convergente? [2]
- (c) ¿Cuál es la condición bajo la que ninguna de las soluciones de los apartados anteriores converge? [3]
- (d) ¿Se puede utilizar el método de iteración para solucionar ecuaciones en diferencias con dos o más retardos? [3]
- (e) Ecuaciones en diferencias como la ecuación (2) pueden ser útiles para analizar las implicaciones de modelos económicos o financieros. Demuéstralo con un ejemplo. [9]

Total de pregunta 2: [33]

## 2 Modelos de series temporales univariantes

3. Considera los dos siguientes modelos MA(1):

$$y_t = \varepsilon_t + \gamma\varepsilon_{t-1}, \quad (3)$$

$$y_t = \varepsilon_t + \frac{1}{\gamma}\varepsilon_{t-1}, \quad (4)$$

donde

$$|\gamma| < 1.$$

- (a) Deriva la función de autocorrelación,  $\rho(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , del modelo en ecuación (3). [5]
- (b) Deriva la función de autocorrelación,  $\rho(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , del modelo en ecuación (4). [5]
- (c) ¿Cuál de los dos modelos es invertible y por qué? [2]
- (d) Según una definición, un proceso  $\{y_t\}$  es invertible si se puede representar por un proceso de orden limitado o convergente. Con referencia a los dos modelos en ecuaciones (3) y (4), explica lo que quiere decir esa definición. [6]
- (e) Consideramos la estimación de un modelo MA(1): [6]

$$y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1},$$

donde

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2).$$

Si la primera autocorrelación muestral,  $\hat{\rho}(1)$ , es 0.4, ¿qué se puede inferir con respecto al valor del parámetro  $\theta$ ?

- (f) En general, ¿cómo se puede determinar la invertibilidad de un modelo ARMA( $p, q$ )? [6]
- (g) ¿Qué quiere decir cuando se dice que la invertibilidad es necesario para la identificación de un modelo ARMA( $p, q$ )? [3]

4. Considera el siguiente proceso ARMA(4,2):

$$y_t = 0,5y_{t-1} + \phi y_{t-3} - 0,5\phi y_{t-4} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} + 0,25\varepsilon_{t-2},$$

donde

$$\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2),$$

$$|\phi| < 1.$$

- (a) Demuestra que el modelo en ecuación (4) es sobreparametrizado y que el modelo siguiente es equivalente: [6]

$$y_t = \phi y_{t-3} + \varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1}. \quad (5)$$

- (b) Determina si el modelo en ecuación (5) es estacionario. Explica tu respuesta. [6]
- (c) Calcula la función de autocorrelación del modelo en ecuación (5). Dibuja el correlograma para los primeros nueve retardos; es decir, la función de autocorrelación,  $\rho_k$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ . [8]
- (d) El modelo en ecuación (5) es de la siguiente forma: [7]

$$y_t = \phi y_{t-3} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}.$$

Demuestra como se puede transformar este modelo a un modelo de medias móviles del orden infinito:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}.$$

- (e) Determina los valores de  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  y  $\psi_3$  en términos de  $\phi$  y  $\theta$ . [6]

Total de pregunta 4: [33]

### 3 Modelos de series temporales multivariantes

5. (a) En el análisis de modelos de vectores autoregresivos (VAR), distinguimos lo que se llama un VAR estructural y lo que se llama un VAR estándar. ¿Cuál es la diferencia entre ambos modelos? [7]
- (b) ¿Qué significa cuando se habla de la necesidad de identificar un modelo de vectores autoregresivos? Da un ejemplo de un método de identificación (que no sea el método de Blanchard y Quah) y explica en breve su idea principal. [7]

Blanchard y Quah (1989) proponen un elaborado método de identificación de un VAR que sirve para descomponer el producto nacional en sus componentes temporales y permanentes.

El VAR estructural que proponen es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(L) & C_{12}(L) \\ C_{21}(L) & C_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

donde

$$\Sigma_\varepsilon := \begin{bmatrix} \text{Var}(\varepsilon_1) & \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \text{Var}(\varepsilon_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$y_t$  := producto nacional,

$z_t$  := tasa del desempleo.

El VAR estructural se puede escribir también así:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{11}(k) \varepsilon_{1,t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{12}(k) \varepsilon_{2,t-k}, \\ z_t &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{21}(k) \varepsilon_{1,t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{22}(k) \varepsilon_{2,t-k}. \end{aligned}$$

Por otra parte, el VAR estándar es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(L) & A_{12}(L) \\ A_{21}(L) & A_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1,t} \\ e_{2,t} \end{bmatrix}.$$

- (c) Blanchard y Quah imponen la siguiente restricción: [7]

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{11}(k) \varepsilon_{1,t-k} = 0.$$

Explica en breve cómo esta ecuación sirve para dar una interpretación económica a los "shocks"  $\varepsilon_{1,t}$  y  $\varepsilon_{2,t}$  (además de hacer posible la identificación del modelo).

(d) Del modelo estándar, se puede derivar la siguiente ecuación:

[7]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - A_{11}(L)L & -A_{12}(L)L \\ -A_{21}(L)L & 1 - A_{22}(L)L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_{1,t} \\ e_{2,t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A^*|} \begin{bmatrix} 1 - A_{22}(L)L & A_{12}(L)L \\ A_{21}(L)L & 1 - A_{11}(L)L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}(0) & c_{12}(0) \\ c_{21}(0) & c_{22}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$A^* := \begin{bmatrix} 1 - A_{11}(L)L & -A_{12}(L)L \\ -A_{21}(L)L & 1 - A_{22}(L)L \end{bmatrix}^{-1}.$$

Desconocemos inicialmente la siguiente matriz:

$$C(0) := \begin{bmatrix} c_{11}(0) & c_{12}(0) \\ c_{21}(0) & c_{22}(0) \end{bmatrix}.$$

Dada la ecuación (7), explica (en palabras, sin cálculos) por qué el conocimiento de la matriz  $C(0)$  es importante para recuperar los parámetros  $c_{11}(k)$ ,  $c_{12}(k)$ ,  $c_{21}(k)$  y  $c_{22}(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  del VAR estructural en ecuación (6).

(e) ¿Para qué puede servir el conocimiento de  $c_{11}(k)$ ,  $c_{12}(k)$ ,  $c_{21}(k)$  y  $c_{22}(k)$ ?

[6]

Total de pregunta 5: [34]

6. Considera la siguiente regresión de cointegración:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \beta x_t + u_t, \\ u_t &= \phi u_{t-1} + \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (8)$$

donde los  $\varepsilon_t$  son innovaciones independientes y idénticamente distribuidas con media cero y varianza  $\sigma^2$  y las series temporales  $x_t$  y  $y_t$  son  $I(1)$ . El modelo se puede escribir en términos de un modelo de corrección de error:

$$\Delta y_t = \lambda + \gamma(y_{t-1} - \nu x_{t-1}) + \delta \Delta x_t + \varepsilon_t. \quad (9)$$

(a) Determina  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$ ,  $\delta$  en términos de los parámetros del problema original.

[6]

(b) Caracteriza el comportamiento del modelo de corrección de error en (9) en cada uno de los siguientes casos. En cada caso, comenta también sobre el comportamiento de la variable  $u_t$  en el modelo (8).

[12]

- i.  $\gamma > 0$ ,
- ii.  $\gamma = 0$ ,
- iii.  $-1 < \gamma < 0$ ,
- iv.  $\gamma = -1$ ,
- v.  $-2 < \gamma < -1$ ,
- vi.  $\gamma = -2$ .

- (c) Dando un ejemplo específico, explica cómo una relación de cointegración entre dos o más variables – tal como vemos en ecuación (8) – puede ser el resultado de una teoría económica. [6]
- (d) ¿Cuál es, en un ejemplo que has elegido, el significado económico del modelo de corrección de error en ecuación (9)? [6]
- (e) Explica en breve por qué variables cointegradas tienen que tener tendencias estocásticas comunes. [4]

Total de pregunta 6: [34]

## References

Blanchard, O. J. y Quah, D. (1989), 'The dynamic effects of aggregate demand and supply disturbances', *American Economic Review* **79**(4), 655–673.