Macroeconometría (2005–2006)
Examen de prueba

Nikolas A. Müller-Plantenberg*

24 de mayo de 2006

Nombre: ______________________________

Apellido: ______________________________

NIF (sólo examen final): ______________________________

Instrucciones

Por favor, no leer las preguntas antes de que el profesor lo indique.

Hay tres partes, cada una con dos preguntas entre las que se puede elegir. **Contesta tres preguntas, una de cada parte.**

No hay ninguna ventaja de contestar a ambas preguntas de una parte; en este caso, sólo vale la respuesta a la primera de las dos preguntas.

Duración del examen: **1 hora y 55 minutos** (10 minutos para leer las preguntas, 35 minutos para cada pregunta).

El resultado de este examen de prueba no se incluirá en la nota del curso.

*E-mail: nikolas.muller@uc3m.es. Address: Room 15.1.08, Department of Economics, Universidad Carlos III de Madrid, Calle Madrid 126, 28903 Getafe (Madrid), Spain. Phone: +34 91 624-8669.

Pregunta	Puntos	Obtenido
1	33	
2	33	
3	33	
4	33	
5	34	
6	34	
Total	200	

1 Ecuaciones en diferencias

1. Considera la siguiente ecuación en diferencias del segundo orden:

$$y_t = 0.7y_{t-1} - 0.12y_{t-2} + 4.2. \tag{1}$$

   (a) Deriva la ecuación característica, mostrando todos los pasos. ¿Cuáles son las raíces características? [6]

   (b) Deriva la solución homogénea, y_t^h, una solución particular, y_t^p, y la solución general, y_t^g, de la ecuación (1). [7]

   (c) Demuestra cómo se puede confirmar que la solución homogénea, y_t^h, es correcta. [7]

   (d) Supón que hay las siguientes condiciones iniciales: [7]

$$y_0 = 16,$$
$$y_1 = 2.$$

   Tomando en cuenta estas condiciones iniciales, ¿cuál es la solución general, y_t^g?

   (e) En general, la solución de una ecuación en diferencias del segundo orden depende de las raíces características, α_1 y α_2. ¿Qué forma tiene la solución en cada uno de los siguientes casos?

      i. Las raíces características, α_1 y α_2, son reales y distintos. [2]

      ii. Las raíces características, α_1 y α_2, son reales e iguales. [2]

      iii. Las raíces características, α_1 y α_2, son imaginarias. [2]

Total de pregunta 1: [33]

2. Considera la siguiente ecuación en diferencias de primer orden:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{2}$$

   (a) i. Deriva una solución particular para y_t en términos de los pasados valores de $\{\varepsilon_t\}$, utilizando el método de iteración. (Para simplificar la solución, puedes suponer que la solución es convergente.) [7]

      ii. ¿Bajo qué condición es esta solución convergente? [2]

   (b) i. Deriva una solución particular para y_t en términos de los futuros valores de $\{\varepsilon_t\}$, utilizando el método de iteración. (Para simplificar la solución, puedes suponer que la solución es convergente.) [7]

      ii. ¿Bajo qué condición es esta solución convergente? [2]

   (c) ¿Cuál es la condición bajo la que ninguna de las soluciones de los apartados anteriores converge? [3]

   (d) ¿Se puede utilizar el método de iteración para solucionar ecuaciones en diferencias con dos o más retardos? [3]

   (e) Ecuaciones en diferencias como la ecuación (2) pueden ser útiles para analizar las implicaciones de modelos económicos o financieros. Demuéstralo con un ejemplo. [9]

Total de pregunta 2: [33]

2 Modelos de series temporales univariantes

3. Considera los dos siguientes modelos MA(1):

$$y_t = \varepsilon_t + \gamma \varepsilon_{t-1}, \tag{3}$$
$$y_t = \varepsilon_t + \frac{1}{\gamma} \varepsilon_{t-1}, \tag{4}$$

donde

$$|\gamma| < 1.$$

(a) Deriva la función de autocorrelación, $\rho(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, del modelo en ecuación (3). [5]

(b) Deriva la función de autocorrelación, $\rho(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, del modelo en ecuación (4). [5]

(c) ¿Cuál de los dos modelos es invertible y por qué? [2]

(d) Según una definición, un proceso $\{y_t\}$ es invertible si se puede representar por un proceso de orden limitado o convergente. Con referencia a los dos modelos en ecuaciones (3) y (4), explica lo que quiere decir esa definición. [6]

(e) Consideramos la estimación de un modelo MA(1): [6]

$$y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1},$$

donde

$$\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2).$$

Si la primera autocorrelación muestral, $\hat{\rho}(1)$, es 0.4, ¿qué se puede inferir con respecto al valor del parámetro θ?

(f) En general, ¿cómo se puede determinar la invertibilidad de un modelo ARMA(p, q)? [6]

(g) ¿Qué quiere decir cuando se dice que la invertibilidad es necesario para la identificación de un modelo ARMA(p, q)? [3]

4. Considera el siguiente proceso ARMA(4,2):

$$y_t = 0{,}5 y_{t-1} + \phi y_{t-3} - 0{,}5 \phi y_{t-4} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} + 0{,}25 \varepsilon_{t-2},$$

donde

$$\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2),$$
$$|\phi| < 1.$$

(a) Demuestra que el modelo en ecuación (4) es sobreparametrizado y que el modelo siguiente es equivalente: [6]

$$y_t = \phi y_{t-3} + \varepsilon_t - 0{,}5 \varepsilon_{t-1}. \tag{5}$$

(b) Determina si el modelo en ecuación (5) es estacionario. Explica tu respuesta. [6]

(c) Calcula la función de autocorrelación del modelo en ecuación (5). Dibuja el correlograma para los primeros nueve retardos; es decir, la función de autocorrelación, ρ_k, con $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$. [8]

(d) El modelo en ecuación (5) es de la siguiente forma: [7]

$$y_t = \phi y_{t-3} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}.$$

Demuestra como se puede transformar este modelo a un modelo de medias móviles del orden infinito:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}.$$

(e) Determina los valores de ψ_0, ψ_1, ψ_2 y ψ_3 en términos de ϕ y θ. [6]

Total de pregunta 4: [33]

3 Modelos de series temporales multivariantes

5. (a) En el análisis de modelos de vectores autoregresivos (VAR), distinguimos lo que se llama un VAR estructural y lo que se llama un VAR estándar. ¿Cuál es la diferencia entre ambos modelos? [7]

   (b) ¿Qué significa cuando se habla de la necesidad de identificar un modelo de vectores autoregresivos? Da un ejemplo de un método de identificación (que no sea el método de Blanchard y Quah) y explica en breve su idea principal. [7]

Blanchard y Quah (1989) proponen un elaborado método de identificación de un VAR que sirve para descomponer el producto nacional en sus componentes temporales y permanentes.

El VAR estructural que proponen es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(L) & C_{12}(L) \\ C_{21}(L) & C_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned} \Sigma_\varepsilon &:= \begin{bmatrix} \text{Var}(\varepsilon_1) & \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \text{Var}(\varepsilon_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ y_t &:= \text{producto nacional}, \\ z_t &:= \text{tasa del desempleo}. \end{aligned}$$

El VAR estructural se puede escribir también así:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{11}(k)\varepsilon_{1,t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{12}(k)\varepsilon_{2,t-k}, \\ z_t &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{21}(k)\varepsilon_{1,t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{22}(k)\varepsilon_{2,t-k}. \end{aligned}$$

Por otra parte, el VAR estándar es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(L) & A_{12}(L) \\ A_{21}(L) & A_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1,t} \\ e_{2,t} \end{bmatrix}.$$

   (c) Blanchard y Quah imponen la siguiente restricción: [7]

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{11}(k)\varepsilon_{1,t-k} = 0.$$

   Explica en breve cómo esta ecuación sirve para dar una interpretación económica a los "shocks" $\varepsilon_{1,t}$ y $\varepsilon_{2,t}$ (además de hacer posible la identificación del modelo).

(d) Del modelo estándar, se puede derivar la siguiente ecuación: [7]

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\Delta y_t \\ z_t\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 - A_{11}(L)L & -A_{12}(L)L \\ -A_{21}(L)L & 1 - A_{22}(L)L\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}e_{1,t} \\ e_{2,t}\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A^*|} \begin{bmatrix}1 - A_{22}(L)L & A_{12}(L)L \\ A_{21}(L)L & 1 - A_{11}(L)L\end{bmatrix} \begin{bmatrix}c_{11}(0) & c_{12}(0) \\ c_{21}(0) & c_{22}(0)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t}\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{7}$$

donde

$$A^* := \begin{bmatrix}1 - A_{11}(L)L & -A_{12}(L)L \\ -A_{21}(L)L & 1 - A_{22}(L)L\end{bmatrix}^{-1}.$$

Desconocemos inicialmente la siguiente matriz:

$$C(0) := \begin{bmatrix}c_{11}(0) & c_{12}(0) \\ c_{21}(0) & c_{22}(0)\end{bmatrix}.$$

Dada la ecuación (7), explica (en palabras, sin cálculos) por qué el conocimiento de la matriz $C(0)$ es importante para recuperar los parámetros $c_{11}(k)$, $c_{12}(k)$, $c_{21}(k)$ y $c_{22}(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ del VAR estructural en ecuación (6).

(e) ¿Para qué puede servir el conocimiento de $c_{11}(k)$, $c_{12}(k)$, $c_{21}(k)$ y $c_{22}(k)$? [6]

Total de pregunta 5: [34]

6. Considera la siguiente regresión de cointegración:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \beta x_t + u_t, \\ u_t &= \phi u_{t-1} + \varepsilon_t, \end{aligned} \tag{8}$$

donde los ε_t son innovaciones independientes y idénticamente distribuidas con media cero y varianza σ^2 y las series temporales x_t y y_t son $I(1)$. El modelo se puede escribir en términos de un modelo de corrección de error:

$$\Delta y_t = \lambda + \gamma(y_{t-1} - \nu x_{t-1}) + \delta \Delta x_t + \varepsilon_t. \tag{9}$$

(a) Determina λ, γ, ν, δ en términos de los parámetros del problema original. [6]

(b) Caracteriza el comportamiento del modelo de corrección de error en (9) en cada uno de los siguientes casos. En cada caso, comenta también sobre el comportamiento de la variable u_t en el modelo (8). [12]

i. $\gamma > 0$,
ii. $\gamma = 0$,
iii. $-1 < \gamma < 0$,
iv. $\gamma = -1$,
v. $-2 < \gamma < -1$,
vi. $\gamma = -2$.

(c) Dando un ejemplo específico, explica cómo una relación de cointegración entre dos o más variables – tal como vemos en ecuación (8) – puede ser el resultado de una teoría económica. [6]

(d) ¿Cuál es, en en ejemplo que has elegido, el significado económico del modelo de corrección de error en ecuación (9)? [6]

(e) Explica en breve por qué variables cointegradas tienen que tener tendencias estocásticas comunes. [4]

Total de pregunta 6: [34]

References

Blanchard, O. J. y Quah, D. (1989), 'The dynamic effects of aggregate demand and supply disturbances', *American Economic Review* **79**(4), 655–673.