Macroeconometría
Ejercicios

Nikolas A. Müller-Plantenberg*

Marzo – junio 2006

1 Ecuaciones en diferencias

1. (a) Deriva las formulas de Euler:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

   (b) Deriva la siguiente ecuación:

$$e^{\pi i} = -1.$$

   (c) Deriva la fórmula de de Moivre, utilizando la forma polar de un número complejo, $z = u + vi$.

   (d) Deriva la fórmula de de Moivre, sin utilizar la forma polar de un número complejo, $z = u + vi$.

2. Considera la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1}.$$

   (a) Deriva la solución homogénea, particular y general, suponiendo que el valor inicial de y_t, y_0, es y^0.

   (b) Suponemos que tienes inicialmente 1000 euros en una cuenta bancaria y que añades cada año 200 euros. La cuenta bancaria lleva un tipo de interés de 5%. Escriba la ecuación de acumulación de tus ahorros.

*E-mail: nikolas.muller@uc3m.es. Address: Room 15.1.08, Department of Economics, Universidad Carlos III de Madrid, Calle Madrid 126, 28903 Getafe (Madrid), Spain. Phone: +34 91 624-8669.

3. Considera el siguiente modelo del mercado monetario de Cagan (1956):

$$m_t^d := p_t + \alpha - \beta(p_{t+1} - p_t),$$
$$m_t^s := m_t,$$
$$m_t^d = m_t^s,$$

donde

$m_t^d :=$ logaritmo de la demanda monetaria (nominal),
$m_t^s :=$ logaritmo de la oferta monetaria (nominal),
$p_t :=$ logaritmo del nivel de precios,
$\alpha > 0,$
$\beta > 0.$

(a) Interpreta la función de demanda real de dinero sugerido por Cagan.

(b) Deriva una solución particular para p_t en términos de los pasados valores de $\{m_t\}$, utilizando el método de iteración. Demuestra que esta solución es divergente.

(c) Deriva el mismo resultado – que la solución es divergente – utilizando el operador de retardo.

(d) Deriva una solución particular para p_t en términos de los futuros valores de $\{m_t\}$, utilizando el método de iteración. Deriva la solución general y interpretala.

(e) Deriva la misma solución utilizando el operador de retardo.

(f) Deriva la función impulso-respuesta, es decir, la derivada de p_t con respeto a m_{t+i}, $i = 1, 2 \ldots$. Comenta sobre la intuición de esta función.

4. Busca una solución a la siguiente ecuación, utilizando los operadores de retardo:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \qquad \text{donde } |\phi_1| < 1.$$

5. (a) Considera el siguiente modelo de una economía abierta:

$$s_t = -\xi c_t,$$
$$q_t = s_t,$$
$$z_t + c_t = 0,$$
$$z_t = z_{t-1} - \phi q_{t-1},$$

donde

$q_t :=$ tipo de cambio real (aumento = apreciación real),
$s_t :=$ tipo de cambio nominal (aumento = apreciación nominal),
$z_t :=$ cuenta corriente (exportaciones netas),
$c_t :=$ transferencias de dinero ("cash flow"),
$\xi > 0,$
$\phi > 0.$

No hay otras transacciones en la cuenta corriente que exportaciones y importaciones. Las exportaciones y las importaciones se pagan enseguida, es decir en el mismo periodo, y no hay otras transacciones en las cuentas de capital y financieras de la balanza de pagos.

i. Interpreta las ecuaciones del modelo.
ii. De las ecuaciones del modelo, forma una ecuación en diferencias en z_t como única variable.
iii. Deriva la ecuación característica, mostrando todos los pasos. ¿Cuales son las raíces características?
iv. Deriva las soluciones homogéneas, y_t^h, una solución particular, y_t^p, y la solución general, y_t^g, de la ecuación en diferencias.
v. Deriva la condición bajo la que la solución oscile.
vi. Calcula la frecuencia y el período de la oscilación.
vii. Deriva la condición bajo la que el proceso explota.

(b) Ahora considera el siguiente modelo de una economía abierta:

$$
\begin{aligned}
s_t &= -\xi c_t, \\
q_t &= s_t, \\
z_t + d_t + c_t &= 0, \\
d_t &= d_t^1 - d_{t-1}^1, \\
c_t &= d_{t-1}^1, \\
z_t &= z_{t-1} - \phi q_{t-1},
\end{aligned}
$$

donde

$d_t^1 :=$ flujo de deuda, creada en t, a devolver en $t+1$.

i. Interpreta las ecuaciones del modelo.
ii. De las ecuaciones del modelo, forma una ecuación en diferencias en z_t como única variable.
iii. Deriva la ecuación característica, mostrando todos los pasos. ¿Cuales son las raíces características?
iv. Deriva las soluciones homogéneas, y_t^h, una solución particular, y_t^p, y la solución general, y_t^g, de la ecuación en diferencias.
v. Deriva la condición bajo la que la solución oscile. ¿Es más o menos probable que en el modelo anterior que la cuenta corriente, z_t, oscile?
vi. Calcula la frecuencia y el período de la oscilación. ¿En este modelo, la frecuencia ω es mayor o menor que en modelo anterior?
vii. Deriva la condición bajo la que el proceso explota.
viii. En los gráficos 1 y 2 vemos la evolución de las cuentas corrientes en Japón y Alemania. Las series temporales confirman nuestro modelo en el sentido de que se ven ciclos de la cuenta corriente y del tipo de cambio en ambos países. Sin embargo, en el caso de Alemania, la frecuencia de los ciclos es más grande. ¿Es posible explicar esta observación en términos de nuestro modelo? (Recuerda que el comercio internacional, como fracción del PIB, es más grande en Alemania que en Japón.)

2 Modelos de series temporales estacionarios

1. ¿Cuales de los siguientes series temporales $\{y_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ son estacionarios? Explica tu respuesta.
   (a) y_t son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cada una con una distribución exponencial negativa.
   (b) $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, donde los ε_t son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con una distribución $\mathrm{N}(0, 1)$.
   (c) $y_t = 0{,}7 y_{t-2} + \varepsilon_t$, donde los ε_t son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con una distribución $\mathrm{N}(0, 1)$.
   (d) $y_t = A \cos \omega t$, donde A y ω son constantes reales.
   (e) $y_t = A \cos(\omega t + \phi)$, donde A y ω son constantes reales y ϕ es una variable aleatoria con una distribución uniforme—es decir, rectangular—en el intervalo $[-\pi, \pi]$. (Recuerda que $2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2)$.)
   (f) $y_t = \varepsilon_t + \nu_t$, donde las variables ε_t y ν_t son independientes entre ellas y cada una es estacionaria.
   (g) $y_t = \varepsilon_t \nu_t$, donde las variables ε_t y ν_t son independientes entre ellas y cada una es estacionaria.
   (h) $y_t = x$, $\forall t$, donde $x \sim \mathrm{N}(0, 1)$.
   (i) $y_t = x$, $\forall t$, donde x tiene una distribución de Cauchy, es decir, la función de densidad de probabilidad de x es:

$$f(x) \propto \frac{1}{1 + y^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

   (j) $y_t = x_{-t}$, $\forall t$, donde x_t es estacionario.

2. Explica porque ninguna de las siguientes funciones puede ser la función de autocorrelación, $\rho(\tau), \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, de una serie temporal estacionaria.
   (a) $\rho(0) = 1,$
   $\rho(1) = 0{,}5,$
   $\rho(-1) = -0{,}5,$
   $\rho(-\tau) = 0 \qquad$ cuando $\tau = \pm 2, \pm 3, \ldots$
   (b) $\rho(\tau) = 1{,}1^{|\tau|} \qquad$ cuando $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. Determina la esperanza y la función de autocorrelación del siguiente proceso estocástico:

$$y_t = 12 + \varepsilon_t + 0{,}3\varepsilon_{t-1} - 0{,}2\varepsilon_{t-2}, \qquad \varepsilon \sim (0, \sigma^2).$$

   ¿Cómo cambiaría la función de autocorrelación si se sustituyera el número 12 por 6?

4. Demuestra que en un modelo MA(1), $|\rho_1| \leq 1/2$. ¿Cuál es la condición para que $|\rho_1| = 1/2$?

5. Para cada uno de los siguientes modelos, determina los ordenes p y q de su representación ARMA. Además determina si los modelos son sobreparametrizados, no estacionarios, no invertibles o si tienen una raíz unitaria.

   (a)
   $$y_t - 1{,}2y_{t-1} + 0{,}2y_{t-2} = \varepsilon_t - 1{,}4\varepsilon_{t-1}.$$

   (b)
   $$y_t = -0{,}1y_{t-1} + 0{,}42y_{t-2} + \varepsilon_t + 0{,}9\varepsilon_{t-1} + 0{,}14\varepsilon_{t-2}.$$

   (c)
   $$y_t = 1{,}44y_{t-2} + \varepsilon_t - 0{,}64\varepsilon_{t-2}.$$

   (d)
   $$y_t + 0{,}5y_{t-1} + 0{,}125y_{t-2} = \varepsilon_t.$$

6. (a) Deriva una expresión general para la función de autocorrelación de un proceso AR(2) de media cero:
   $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t,$$
   donde
   $$\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2).$$

   (b) Calcula y dibuja en un gráfico las primeras cinco autocorrelaciones con los siguientes parámetros:
      i. $\phi_1 = 0.6, \quad \phi_2 = -0.2,$
      ii. $\phi_1 = -0.6, \quad \phi_2 = 0.2.$

7. (a) Calcula las autocovarianzas del siguiente proceso ARMA(1,1):
   $$y_t = 0{,}6y_{t-1} + \varepsilon_t - 0{,}8\varepsilon_{t-1}.$$

   (b) ¿Cuales son los coeficientes, ψ_j, en la representación de medias móviles infinita de este proceso?

8. ¿Cómo se pueden estimar ϕ y θ en un modelo ARMA(1,1), utilizando las primeras dos autocorrelaciones? Las primeras dos autocorrelaciones son:

3 Tendencias y estacionalidad en series temporales

1. Dada una condición inicial para y_0, busca la solución para y_t y la previsión en origen t a horizonte $t+s$, $E_t(y_{t+s})$.
   (a) $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t + 0{,}5\varepsilon_{t-1}$.
   (b) $y_t = 1{,}1y_{t-1} + \varepsilon_t$.
   ¿Se puede transformar este modelo en un modelo estacionario?
   (c) $y_t = y_{t-1} + 1 + \varepsilon_t$.
   (d) $y_t = y_{t-1} + t + \varepsilon_t$.
   ¿Se puede transformar este modelo en un modelo estacionario?
   (e) $y_t = \mu_t + \eta_t + 0{,}5\eta_{t-1}$, donde $\mu_t = \mu_{t-1} + \varepsilon_t$.
   ¿Hay una representación ARIMA(p,1,q) de este modelo?
   (f) $y_t = \mu_t + \eta_t + 0{,}5\eta_{t-1}$, donde $\mu_t = 0{,}5\mu_{t-1} + \varepsilon_t$.

   [Enders (2003, exercise 4.1).]

2. Hemos visto que con una muestra limitada, puede ser imposible de distinguir un modelo estacionario de un modelo con raíz unitaria. Considera ahora un ejemplo donde el modelo verdadero es estacionario y donde hay un proceso de raíz unitaria con características estadísticas prácticamente idénticas.

   Suponemos que el modelo estacionario es simplemente:

   $$y_t = \varepsilon_t, \tag{13}$$

   donde

   $$\varepsilon_t \sim (0, \sigma^2).$$

   Ahora intenta distinguir este modelo del siguiente modelo:

   $$(1-L)y_t = (1+\theta L)\varepsilon_t, \tag{14}$$

   donde

   $$\varepsilon_t \sim (0, \sigma^2),$$
   $$|\theta| < 1,$$
   $$y_0 = \varepsilon_0 = 0.$$

   (a) ¿Cuál es la predicción para el período $t+s$ del modelo en ecuación (13), y cuál es el error cuadrático medio de predicción correspondiente (desde el punto de vista del período t)?
   (b) ¿Cuál es la predicción para el período $t+s$ del modelo en ecuación (14), y cuál es el error cuadrático medio de predicción correspondiente (desde el punto de vista del período t)?
   (c) ¿Qué valor tiene que tener θ para que el error cuadrático medio de predicción del modelo (14) sea sólo hasta 10% más grande que en el modelo (13)? Considera los dos siguientes casos.
      i. El horizonte de la predicción, s, es 1.
      ii. El horizonte de la predicción, s, es 5.

4 Modelos multivariantes de series temporales

1. Considera el siguiente modelo de vectores autoregresivos:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

   (a) Calcula la ecuación univariante en diferencias de $\{y_t\}$ que corresponda al modelo en ecuación (15).
   (b) Determina si $\{y_t\}$ es estacionario.
   (c) Caracteriza la función impulso-respuesta de y_t para un shock de magnitud unitaria de e_{1t} y para un shock de magnitud unitaria de e_{2t}.
   (d) Suponemos que $e_{1t} = \varepsilon_{yt} + 0{,}5\varepsilon_{zt}$ y que $e_{2t} = \varepsilon_{zt}$. Caracteriza la función impulso-respuesta de y_t para un shock de magnitud unitaria de ε_{yt} y para un shock de magnitud unitaria de ε_{zt}.
   (e) Suponemos que $e_{1t} = \varepsilon_{yt}$ y que $e_{2t} = 0{,}5\varepsilon_{yt} + \varepsilon_{zt}$. Caracteriza la función impulso-respuesta de y_t para un shock de magnitud unitaria de ε_{yt} y para un shock de magnitud unitaria de ε_{zt}.
   (f) Considerando las últimas dos respuestas, explica por qué el orden de la descomposición Choleski es importante.
   (g) Si estable, un proceso de vectores autoregresivos como él en ecuación (15) tiene la siguiente representación:

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_t,$$

   donde

$$x_t = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}, \quad e_t = \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}.$$

   Calcula A_1^2 y A_1^3 para determinar si A_1^i se acerca a la matriz nula o no.

   [Enders (2003, exercise 5.4).]

2. Considera el siguiente modelo de vectores autoregresivos:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

   (a) Calcula la ecuación univariante en diferencias de $\{y_t\}$ que corresponda al modelo en ecuación (16).
   (b) Determina si $\{y_t\}$ es estacionario.
   (c) Caracteriza la función impulso-respuesta de y_t para un shock de magnitud unitaria de e_{1t} y para un shock de magnitud unitaria de e_{2t}.
   (d) Suponemos que $e_{1t} = \varepsilon_{yt} + 0{,}5\varepsilon_{zt}$ y que $e_{2t} = \varepsilon_{zt}$. Caracteriza la función impulso-respuesta de y_t para un shock de magnitud unitaria de e_{yt} y para un shock de magnitud unitaria de e_{zt}.

(e) Suponemos que $e_{1t} = \varepsilon_{yt}$ y que $e_{2t} = 0{,}5\varepsilon_{yt} + \varepsilon_{zt}$. Caracteriza la función impulso-respuesta de y_t para un shock de magnitud unitaria de e_{yt} y para un shock de magnitud unitaria de e_{zt}.

(f) Considerando las últimas dos respuestas, explica por qué el orden de la descomposición Choleski es importante.

(g) Si estable, un proceso de vectores autoregresivos como él en ecuación (16) tiene la siguiente representación:

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_t,$$

donde

$$x_t = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad e_t = \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}.$$

Calcula A_1^2 y A_1^3 para determinar si A_1^i se acerca a la matriz nula o no.

[Enders (2003, exercise 5.5).]

3. Suponemos que los residuos de un modelo de vectores autoregresivos tienen una matriz varianza-covarianza con Var$(e_1) = 0{,}75$, Var$(e_2) = 0{,}5$ y Cov$(e_1, e_2) = 0{,}25$.

(a) Utilizando una descomposición Choleski con $b_{12} = 0$, identifica los valores de b_{21}, Var(ε_{yt}) y Var(ε_{zt}).

(b) Utilizando una descomposición Choleski con $b_{21} = 0$, identifica los valores de b_{12}, Var(ε_{zt}) y Var(ε_{yt}).

(c) Suponemos que los tres primeros valores estimadas de e_{1t} son 1, 0, -1 y que los tres primeros valores estimadas de e_{2t} son -1, 0, 1. Busca los tres primeros valores de ε_{yt} y ε_{zt}, utilizando cada una de las descomposiciones de las partes anteriores.

[Enders (2003, exercise 5.6).]

5 Cointegración y modelos de corrección de error

1. (a) Hay una variable y_t que es $I(1)$. Se cree que y_t es una función de un regresor x_t que también es $I(1)$. ¿Cuál es la condición para que y_t sea cointegrada con x_t? Explica en breve cómo se puede determinar si hay cointegración entre y_t y x_t.

   (b) Las variables y_t y x_t son los logarítmos de los variables originales y las dos son $I(1)$. Se obtienen las siguientes estimaciones:

   $$\Delta y_t = \lambda - 0{,}105_{(0{,}05)} y_{t-1} + 0{,}096_{(0{,}04)} x_{t-1} + 0{,}54_{(0{,}04)} \Delta x_t + u_t.$$

   donde los errores estándar están en paréntesis. Interpreta este modelo en términos de un modelo de corrección de error. ¿Cuál es la relación a largo plazo? ¿Las variables se mueven uno por uno a largo plazo? ¿Hay cointegración entre y_t y x_t?

2. Considera la siguiente regresión de cointegración:

   $$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \beta x_t + u_t, \\ u_t &= \phi u_{t-1} + \varepsilon_t, \end{aligned}$$

   donde los ε_t son innovaciones independientes y idénticamente distribuidas con media cero y varianza σ^2 y las series temporales x_t y y_t son $I(1)$. El modelo se puede escribir en términos de un modelo de corrección de error:

   $$\Delta y_t = \lambda + \gamma(y_{t-1} - \nu x_{t-1}) + \delta \Delta x_t + \varepsilon_t. \tag{18}$$

   (a) Determina λ, γ, ν, δ en términos de los parámetros del problema original.

   (b) ¿Cuál es la interpretación del modelo en el caso en que $0 < \phi < 1$?

   (c) ¿Cuál es la interpretación del modelo en el caso en que $\phi = 1$?

References

Cagan, P. (1956), The monetary dynamics of hyperinflation, *in* M. Friedman, ed., 'Studies in the quantity theory of money', University of Chicago Press, Chicago, pp. 25–117.

Enders, W. (2003), *Applied Econometric Time Series*, John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane.

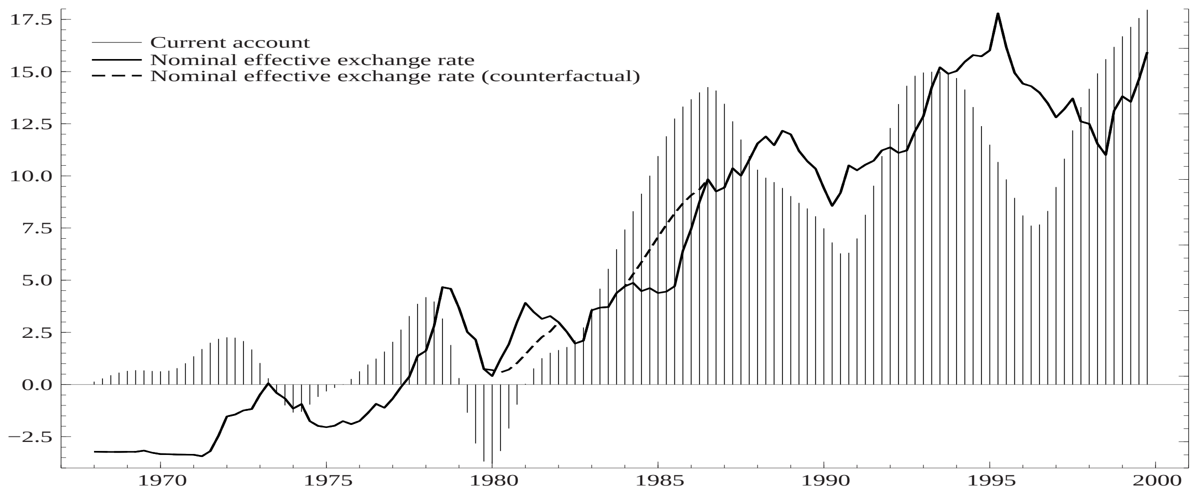

Figure 1: **Japanese current account and counterfactual exchange rate.** Japanese current account (left scale, in trillions of yen, transformed from biannual to quarterly frequency using a natural cubic spline smooth) and nominal effective exchange rate (right scale, in logarithms), period from 1968Q1 to 1999Q4. The exchange rate is plotted along with counterfactual estimates during the periods 1980Q1–1981Q4 and 1984Q2–1986Q2 when measures to liberalize Japan's capital account took effect, inducing capital inflows in the early 1980s and capital outflows in the mid-1980s. The counterfactual series was calculated by removing the exchange rate observations during the years of increased capital in- or outflows and filling the missing values with the estimates from a natural cubic spline smooth based on all remaining observations. *Source: Economic Outlook (OECD), IFS (IMF), own calculations.*

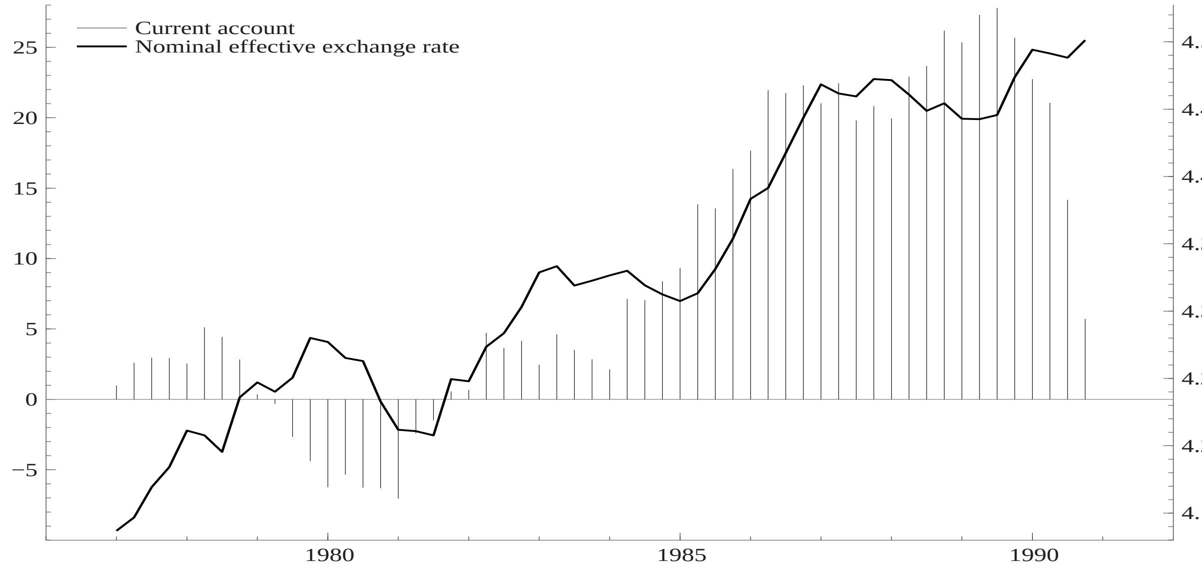

Figure 2: **German current account and nominal exchange rate in the 1980s.** German current account (left scale, in German mark) and nominal effective exchange rate (right scale, in logarithms), period from 1977Q1 to 1990Q4. *Source: International Financial Statistics (IMF).*